1 Funkce komplexní proměnné

Neformální úvod

1.1 Caychy-Riemannovy rovnice a jejich důsledky

Definice 1 (Caychy-Riemannovy rovnice a komplexní derivace). *Nechť $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je funkce ve tvaru $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = a+bi \in A$ a nechť existuje $\delta > 0$, že $U(z,\delta) \subset A$. Derivaci funkce f v bodě z definujeme jako*

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z},$$

je-li limita napravo definována. Pokud existují $\nabla u(a,b)$ a $\nabla v(a,b)$, potom rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b), \tag{1}$$

*nazýváme **Cauchy-Riemannovými rovnicemi** (funkce f v bodě z).*

*Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom funkci $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zazveme **holomorfní** (na Ω) pokud ve všech bodech $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$. Množinu všech funkcí holomorfních na Ω budeme značit $H(\Omega)$.*

Lemma 2 (tvar komplexní derivace). *Nechť $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je funkce ve tvaru $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = a+bi \in A$ a nechť existuje $f'(z)$. Potom platí*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a,b).$$

Speciálně, dané parciální derivace existují a pro f v bodě z platí Cauchy-Riemannovy rovnice.

Věta 3 (Caychy-Riemannovy rovnice a komplexní derivace). *Nechť $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je funkce ve tvaru $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = a+bi \in A$ a nechť existuje $\delta > 0$, že $U(z,\delta) \subset A$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$f'(z)$ existuje,*
2. *u a v mají totální diferenciál v (a,b) a platí (1).*

Poznámky a příklady. 1. *Pro komplexní derivaci platí stejná pravidla pro součet, součin, podíl a skládání jako známe z $\mathbb{R}$.*

2.
   - *Polynomy a mají komplexní derivaci na celém $\mathbb{C}$.*
   - *Racionální funkce mají komplexní derivaci na celém svém definičním oboru (tedy mimo nulové body jmenovatele).*
   - *Funkce definované mocninnou řadou mají komplexní derivaci uvnitř kruhu konvergence.*

   Všechny tyto derivace lze spočítat podle vzorečků, které známe z $\mathbb{R}$.

3. *Je-li $f = u + iv \in H(\Omega)$, potom jsou funkce u i v harmonické (na Ω chápané jako podmnožina $\mathbb{R}^2$), tedy platí $\Delta u = \Delta v = 0$.*